



CONCOURS D'ACCES EN DEUXIEME ANNEE
DU CYCLE INE DE L'INPT

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Aucun document n'est autorisé)

Durée 1H30

MARDI 19 JUILLET 2011

N. B. :

- *Les problèmes 1 et 2 sont indépendants.*
- *Les notations de l'énoncé seront respectées.*
- *La plus grande importance sera attachée à la rigueur des raisonnements*

PROBLEME 1

On considère un signal $x(t)$ (t exprime le temps) défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad a > 0$$

On rappelle la transformée de Fourier (T.F) de $x(t)$ et la transformée de Fourier inverse (T.F.I) de $X(f)$:

$$(T.F) \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft} dt, \quad f \text{ désigne la fréquence de } x(t).$$

$$(T.F. I) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2j\pi ft} df$$

- 1) Montrer que $X(f) = \frac{\sin(\pi f a)}{\pi f}$.
- 2) En utilisant la définition de la transformée de Fourier inverse, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f a)}{\pi f} df = \text{sgn}(\alpha) = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha > 0 \\ -1 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}, \quad \text{sgn}(\cdot) \text{ désigne la fonction signe.}$$

- 3) Dédurre de la question 2 que la transformée de Fourier inverse de la fonction $\frac{1}{\pi f}$ est le signal $j \text{sgn}(t)$.
- 4) Dédurre de la question 3 que la transformée de Fourier du signal $\frac{1}{\pi t}$ est $-j \text{sgn}(f)$
- 5) On considère la transformée d'Hilbert d'un signal $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\mu)}{t - \mu} d\mu$$

En utilisant le fait que $\hat{x}(t)$ est la convolution (voir définition ci-dessous) de $x(t)$ avec un signal qu'on déterminera, montrer que la transformée de Fourier de $\hat{x}(t)$ est égale à $\hat{X}(f) = -j \text{sgn}(f) X(f)$.

On rappelle la définition de la convolution de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mu)y(t - \mu)d\mu$$

6) En déduire de la question 5 la transformée d'Hilbert des signaux suivants :

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad x_2(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad f_0 > 0$$

PROBLEME 2

On considère un processus $Y(t)$ stationnaire au sens large donné par :

$$Y(t) = X(t + T) - X(t - T)$$

où $X(t)$ est un processus réel, stationnaire au sens large avec une densité spectrale de puissance (DSP) $\gamma_X(f)$ et T est une constante.

Calculer la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ en fonction de $\gamma_X(f)$.

On rappelle que :

- La fonction d'autocorrélation d'un processus $X(t)$ réel stationnaire au sens large est définie par :

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où $E[.]$ définit l'espérance mathématique sur la variable aléatoire du processus $X(t)$.

- La densité spectrale de puissance d'un processus $X(t)$ stationnaire au sens large est définie par :

$$\gamma_X(f) = TF[R_X(\tau)] \quad \text{où } T.F \text{ désigne la transformée de Fourier.}$$